

# Der Kernphotoeffekt an Beryllium bei hohen Energien

Von HERBERT ÜBERALL

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Wien

(Z. Naturforsch. **8a**, 142—148 [1953]; eingegangen am 9. Oktober 1952)

Es wird der Energieverlauf des Wirkungsquerschnittes und die Winkelverteilung der emittierten Neutronen bei der Kernreaktion ( $\gamma$ , n) am  $^9\text{Be}$  im Energieintervall 20 bis 200 MeV untersucht. Als Grundzustand wird der  $^2\text{P}_{3/2}$ -Zustand einer rechteckigen Potentialmulde mit einer Reichweite  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm und einer Tiefe von  $V_0 = 12,09$  MeV verwendet. Die untere Grenze des diskutierten Energiebereichs wird bestimmt durch die Gültigkeitsbedingung der Bornschen Approximation, gemäß der als Endzustand eine ebene Welle  $\exp i\mathbf{k}_0\mathbf{r}$ , die Wellenfunktion eines freien Teilchens, eingesetzt wurde. Dadurch war es möglich, den Retardierungsfaktor des Photoeffekt-Matrixelementes beizubehalten. Die obere Grenze des Energiebereichs ergibt sich durch die Vernachlässigung relativistischer Terme. Die Winkelverteilung enthält einen überwiegenden Anteil proportional  $\sin^2 \Theta$ , einen kleinen isotropen und einen vernachlässigbaren weiteren Term. Der totale Wirkungsquerschnitt liegt bei 20 MeV in der Größenordnung  $10^{-28} \text{ cm}^2$  und fällt dann unter Durchlaufung mehrerer Nullstellen und Maxima rasch auf  $10^{-30} \text{ cm}^2$  ab.

Eine Anwendung des Zweikörpermodells auf den  $^9\text{Be}$ -Kern, die in den letzten Jahren von mehreren Autoren, unter anderen von Schlägl<sup>1</sup>, Guth und Mullin<sup>2</sup>, Sexl<sup>3</sup> und Bergmann<sup>4</sup> durchgeführt wurde, hat bei Vergleich mit experimentellen Arbeiten, z. B. von Hamermesh u. a.<sup>5</sup> und von Russell, Sachs, Wattenberg und Fields<sup>6</sup> sowohl im Energieverlauf des Wirkungsquerschnitts als auch in der Winkelverteilung der Photoneutronen gute Erfolge gezeigt. Die Experimente reichten allerdings nur bis zu  $\gamma$ -Energien von einigen MeV. Für diesen Energiebereich mußten die exakten Wellenfunktionen der emittierten Neutronen verwendet werden; andererseits aber durfte die Retardierung vernachlässigt werden. Der vorherrschende Term ergab sich durch die elektrischen Dipolübergänge in den S- und den D-Zustand, und ein magnetischer Dipolübergang lieferte nur einen vernachlässigbar kleinen Beitrag.

Geht man nun zu höheren Energien über, so wird es möglich, das Übergangsmatrixelement unter Verwendung der Bornschen Approximation zu ermitteln, welche bekanntlich das emittierte Neutron als freies Teilchen zu behandeln gestattet. Gerade bei Beryllium ist diese Annahme wegen der geringen Bindungsenergie des Neutrons an den Restkern von

guter Berechtigung. Andererseits kann der Retardierungsfaktor  $\exp i\mathbf{k}_0\mathbf{r}$  bei hohen Energien nicht mehr gleich eins gesetzt werden (was einem Dipolmoment entspricht), da die Kerndimensionen gegenüber der Wellenlänge des  $\gamma$ -Quants nicht mehr vernachlässigbar klein sind.

Das Zweikörpermodell betrachtet den  $^9\text{Be}$ -Kern aus einem spinlosen  $^8\text{Be}$ -Kernrumpf und einem Neutron aufgebaut, die sich beide um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Der  $^8\text{Be}$ -Kern ist zwar schwach instabil und zerfällt in zwei  $\alpha$ -Teilchen, doch ist seine Lebensdauer lang gegenüber der Zeit, in der der Photoeffekt vor sich geht (vgl.<sup>1</sup>). Der Grundzustand ist nach der Theorie des Schalenaufbaus der leichten Kerne ein P-Zustand, und für die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses lassen Messungen von Paul<sup>7</sup> den Wert  $j = 3/2$  wahrscheinlich erscheinen. Wir nehmen in der vorliegenden Arbeit diesen Wert an und beschreiben das Wechselwirkungspotential  $^8\text{Be}-n$  durch eine kugelsymmetrische Potentialmulde, deren Reichweite  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13}$  cm willkürlich festgesetzt wird und deren Tiefe sich mit Hilfe der Eigenwertgleichung des P-Zustandes einer Rechteckmulde

$$\beta r_0 \operatorname{ctg} \beta r_0 = 1 + (1 + \alpha r_0) \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2$$

<sup>1</sup> F. Schlägl, Z. Naturforsch. **3a**, 229 [1948].  
<sup>2</sup> E. Guth u. C. J. Mullin, Physic. Rev. **76**, 234 [1949].

<sup>3</sup> Th. Sexl, Acta physica austriaca **3**, 277 [1949].  
<sup>4</sup> O. Bergmann, Acta physica austriaca **4**, 338 [1950].

<sup>5</sup> B. Hamermesh, M. Hamermesh u. A. Wattenberg, Physic. Rev. **76**, 611 [1949].

<sup>6</sup> B. Russell, D. Sachs, A. Wattenberg u. R. Fields, Physic. Rev. **76**, 545 [1949].

<sup>7</sup> W. Paul, Z. Physik **117**, 774 [1941].



aus der experimentell bestimmten Bindungsenergie des Grundzustandes  $\varepsilon = 1,63$  MeV zu  $V_0 = 12,09$  MeV bestimmt.

Einer Anwendung dieses einfachen Modells stehen zwar bei hohen  $\gamma$ -Energien folgende Gründe entgegen:

1. Die Wechselwirkung kann vielleicht nicht mehr durch eine Rechteckmulde, sondern muß durch ein exponentielles oder Yukawa-Potential beschrieben werden.

2. Das Zweikörpermodell ist möglicherweise überhaupt unzulässig, und es muß das Dreikörpermodell  $\alpha + \alpha + n$  herangezogen werden.

3. Auftreten anderer Kernreaktionen als der  $(\gamma, n)$ -Reaktion.

Trotzdem aber kann angenommen werden, daß unser Modell den experimentellen Ergebnissen wenigstens teilweise gerecht wird, um so mehr, als sich ja bei kleinen Energien eine gute Übereinstimmung ergab. Eine nichtzentrale Wechselwirkung scheint auch bei hohen Energien vernachlässigbar, so wie beim analogen Fall des Deuteron-Kernphotoeffekts<sup>8,9</sup>.

Der Übergang erfolgt beim vorliegenden Photoprozeß auf „elektrischem“ Wege durch Wechselwirkung des Vektorpotentials des einfallenden Lichtquants mit der Ladung des  $^8\text{Be}$ -Kernrumpfs, und auf „magnetischem“ Wege durch Wechselwirkung des Magnetfeldes des Lichtquants mit dem magnetischen Moment des  $^8\text{Be}-n$ -Systems. Dieses magnetische Moment setzt sich zusammen aus dem magnetischen Moment des Neutrons und aus dem Moment, das durch den Bahndrehimpuls der  $^8\text{Be}$ -Partikel um den Schwerpunkt entsteht. In Abschnitt I wird diese Wechselwirkung formuliert, die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt kurz hergeleitet, und die möglichen Grund- und Endzustände werden aufgestellt. Sodann wird in Abschnitt II die Integration ausgeführt und in Abschnitt III und IV die Formeln der Winkelverteilung und des totalen Wirkungsquerschnitts ermittelt. Abschnitt V bringt abschließend numerische Diskussionen.

#### Verwendete Bezeichnungen

$m$	... Neutronenmasse
$\mu$	... reduzierte Neutronenmasse = $\frac{8}{9} m$

$M$	... Masse des $^8\text{Be} = 8m$
$p$	... Relativimpuls des Neutrons
$\omega$	... Kreisfrequenz des Lichtquants
$k_0$	... Wellenzahl des Lichtquants = $\frac{\omega}{c}$
$\mu_n$	... magnetisches Moment des Neutrons in Einheiten $\frac{e\hbar}{2mc}$
$r$	... Relativkoordinatensystem
$e$	... Polarisationseinheitsvektor des Lichtquants
$f$	... Wellenzahl des Neutrons = $p/\hbar$
$\varepsilon$	... Bindungsenergie des Neutrons im $^8\text{Be}$
$E_r$	... Relativenergie des Zweikörpersystems = $p^2/2\mu$
$\psi_a, \psi_b$	... Grund- und Endzustand
$\Theta$	... Winkel zwischen $f_0$ und $f$
$\Phi$	... Winkel zwischen der $f_0 f$ -Ebene und der $f_0 e$ -Ebene

$$k = \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} E_r \right)^{1/2}, \quad n_0 = \left( \frac{V_0}{\varepsilon} - 1 \right)^{1/2},$$

$$\alpha = \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} \varepsilon \right)^{1/2}, \quad \beta = \left( \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - \varepsilon) \right)^{1/2}.$$

#### I. Die störungstheoretische Formel für den Wirkungsquerschnitt

Die Schrödinger-Gleichung unseres Problems kann wegen des Auftretens von Störungsgliedern nicht von vornherein in der reduzierten Gestalt angesetzt werden, sondern wir müssen von der vollständigen Gleichung des Zweikörperproblems ausgehen. Diese lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_1 u - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 u + (V - E) u + \bar{H} u = 0. \quad (1)$$

Die Störung des Hamilton-Operators  $\bar{H}$  kommt durch die Felder des einfallenden Lichtquants zu stande. Dieses besitzt ein Vektorpotential

$$\mathfrak{A}(r, t) = e^{i(f_0 r - \omega t)} \quad (2a)$$

bzw. ein magnetisches Feld

$$\mathfrak{H}(r, t) = \text{rot } \mathfrak{A}(r, t) = i[f_0, e] e^{i(f_0 r - \omega t)}. \quad (2b)$$

Es kann im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß das Lichtquant in der  $x$ -Richtung einfällt ( $f_0 \parallel x$ ) und in der  $y$ -Richtung polarisiert ist ( $e \parallel y$ ). Dann liegt das Magnetfeld  $\mathfrak{H}$  in der  $z$ -Richtung. Bezeichnet man den Ort der  $^8\text{Be}$ -Partikel mit  $r_1$ , den des Neutrons

<sup>8</sup> J. F. Marshall u. E. Guth, Physic. Rev. **76**, 1879 [1949].

<sup>9</sup> M. E. Rose u. G. Goertzel, Physic. Rev. **72**, 749 [1947].

mit  $\mathbf{r}_2$ , so lautet die Wechselwirkungsenergie<sup>10</sup> zwischen der Ladung  $Ze$  des  $^8\text{Be}$  und dem Vektorpotential:

$$i \frac{Ze\hbar}{Mc} \mathfrak{A}(\mathbf{r}_1) \mathbf{grad}_1, \quad (3a)$$

zwischen dem magnetischen Moment  $(e\hbar/2mc)\mu_n \vec{\sigma}$  des Neutrons und dem Magnetfeld des Lichtquants:

$$-\frac{e\hbar}{2mc} \mu_n \mathfrak{H}(\mathbf{r}_2) \vec{\sigma} \quad (3b)$$

und schließlich zwischen dem magnetischen Moment  $(Ze/2Mc)\mathfrak{L}(\mathbf{r}_1)$  des  $^8\text{Be}$ , das durch dessen Bahndrehimpuls  $\mathfrak{L}(\mathbf{r}_1) = -i\hbar [\mathbf{r}_1, \mathbf{grad}_1]$  entsteht, und dem Magnetfeld

$$-\frac{Ze}{2Mc} \mathfrak{H}(\mathbf{r}_1) \mathfrak{L}(\mathbf{r}_1). \quad (3c)$$

Der Störungsterm  $\bar{H}$  ist dann die Summe dieser drei Ausdrücke. Führen wir die Relativ- und Schwerpunktskoordinaten

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}^* = \frac{M\mathbf{r}_1 + m\mathbf{r}_2}{M + m}$$

ein, so erhalten wir

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^* + \frac{1}{9}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}^* - \frac{8}{9}\mathbf{r}.$$

Eine Separation von Gl. (1) durch den Ansatz

$$u = \psi(\mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}^*)$$

ist jedoch nur in einem Koordinatensystem durchführbar, in dem der Schwerpunkt nach dem Prozeß ruht (Schwerpunktssystem, CM-System). Das soll im folgenden vorausgesetzt werden. Der Schwerpunkt bewegt sich dann mit der Energie

$$E_s = (\hbar\omega/c)^2/18m$$

vor dem Prozeß in entgegengesetzter Richtung wie das Lichtquant auf dieses zu.

Wir erhalten nun in den Relativkoordinaten die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta\psi + (V - E)\psi + \frac{e\hbar}{mc} (W_1 + W_2 + W_3)\psi = 0 \quad (4)$$

$$\text{mit } W_1 = \frac{i}{2} e^{\frac{1}{2}i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} \mathbf{grad}_y, \quad (4a)$$

$$W_2 = -\frac{i}{2} \mu_n k_0 e^{-\frac{8}{9}i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} \sigma_z, \quad (4b)$$

$$W_3 = -\frac{i}{36} k_0 e^{\frac{1}{2}i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} \frac{1}{\hbar} L_z. \quad (4c)$$

<sup>10</sup> Vgl. das Lehrbuch von L. I. Schiff, „Quantum Mechanics“, New York: Mac Graw Hill.

Durch zeitabhängige Störungstheorie erhält man sodann für den Wirkungsquerschnitt die Formel<sup>10</sup>:

$$d\Phi = \frac{2\pi}{\hbar c} \varrho |H'|^2 d\Omega, \quad (5)$$

wobei sich die Dichte der Endzustände beim Photoeffekt zu

$$\varrho = \frac{\mu p}{8\pi^3 \hbar^3} = \frac{m\hbar k}{9\pi^3 \hbar^3} \quad (5a)$$

ergibt und das Matrixelement für Absorption eines Lichtquants

$$H' = \left( \frac{2\pi\hbar^2 c^2}{\hbar\omega} \right)^{1/2} \sum_s \int \psi_b^* \frac{e\hbar}{m c} (W_1 + W_2 + W_3) \psi_a d\tau \quad (5b)$$

lautet.

Der Grundzustand ist ein  ${}^2\text{P}_{3/2}$ -Zustand ( $l=1, j=3/2$ ). Er ist bezüglich der magnetischen Quantenzahl  $m$  vierfach entartet, und die Wellenfunktionen lauten (s. Anm. 10) in Form von Eigenfunktionen des Gesamtdrehimpulses  $\mathfrak{J}$ :

$$\begin{aligned} m &= \frac{3}{2}, & \psi_a^{\frac{3}{2}} &= R \alpha_n Y_{11}, \\ m &= \frac{1}{2}, & \psi_a^{\frac{1}{2}} &= R \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \alpha_n Y_{10} + \beta_n Y_{11}), \\ m &= -\frac{1}{2}, & \psi_a^{-\frac{1}{2}} &= R \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \beta_n Y_{10} + \alpha_n Y_{1-1}) \\ m &= -\frac{3}{2}, & \psi_a^{-\frac{3}{2}} &= R \beta_n Y_{1-1}; \end{aligned} \quad (6)$$

$\alpha_n, \beta_n$  sind dabei die Spinfunktionen des Neutrons; die normierten Kugelflächenfunktionen sind

$$Y_{10} = \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta, \quad Y_{11} = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta e^{i\varphi},$$

$$Y_{1-1} = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta e^{-i\varphi}.$$

Für den Endzustand sind nach der Bornschen Approximation die beiden folgenden Wellenfunktionen möglich:

$$\psi_b^{\frac{1}{2}} = \alpha_n e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}, \quad \psi_b^{-\frac{1}{2}} = \beta_n e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}. \quad (7)$$

Bei Berechnung des Wirkungsquerschnitts muß über die möglichen Grundzustände gemittelt und über die Endzustände summiert werden; daher erhalten wir

$$d\Phi = 4 \frac{d\Omega}{9\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar k}{m\omega} I \quad (8)$$

$$\text{mit } I = \frac{1}{4} \sum_m \sum_\sigma |J_m^\sigma|^2, \quad (8a)$$

$$\text{und } J_m^\sigma = \sum_s \int \psi_b^{\sigma*} (W_1 + W_2 + W_3) \psi_a^m d\tau. \quad (8b)$$

## II. Rechnerische Details

Die Ausführung der Integration soll am Beispiel des Ausdrucks

$$J_m^\sigma(1) = \sum_s \int \psi_b^{\sigma*} W_1 \psi_a^m d\tau$$

kurz erläutert werden. Wir erhalten durch Einsetzen und mittels

$$\begin{aligned} \sum_s \alpha_n^* \alpha_n &= \sum_s \beta_n^* \beta_n = 1, \quad \sum_s \alpha_n^* \beta_n = \dots = 0: \\ J_{\frac{1}{2}}^1(1) &= -\frac{1}{2} k_y \int R \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \vartheta e^{iq\tau} e^{-iqr \cos(\vartheta, \tau)} d\tau, \end{aligned}$$

$$\text{wobei wir} \quad \frac{1}{9} \mathfrak{k}_0 - \mathfrak{k} = -q$$

bezeichneten. Polarwinkel und Azimut von  $q$  nennen wir  $\vartheta_0, \varphi_0$ . Wir wollen nun das Koordinatensystem der Integrationsvariablen so drehen, daß die neue  $z$ -Achse in die Richtung von  $q$  fällt. Das bewirken die beiden hintereinander ausgeführten Transformationen

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi_0 - y' \sin \varphi_0 \\ y = x' \sin \varphi_0 + y' \cos \varphi_0 \\ z = z', \end{cases} \quad (9a)$$

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \vartheta_0 + z'' \sin \vartheta_0 \\ y' = y'' \\ z' = -x'' \sin \vartheta_0 + z'' \cos \vartheta_0, \end{cases} \quad (9b)$$

deren Funktionaldeterminanten gleich eins sind:  $r$  bleibt unverändert. Unsere Kugelflächenfunktionen transformieren sich in

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \cos \vartheta'' Y_{lm}(\vartheta_0, \varphi_0) + \dots,$$

wobei die Punkte Terme symbolisieren, die bei der Integration verschwinden. Der Winkel zwischen  $q$  und  $\tau$  geht in den Winkel  $\vartheta''$  über. Die Winkelintegration liefert uns nun, ausgedrückt durch Bessel-Funktionen:

$$\int_0^\pi e^{-iqr \cos \vartheta''} \cos \vartheta'' \sin \vartheta'' d\vartheta'' = \frac{-2i}{\sqrt{qr}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_{\frac{1}{2}}(qr).$$

Wir bezeichnen ferner die Radialintegrale mit

$$J_r(q) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty (qr)^{-\frac{1}{2}} r^2 R J_{\frac{1}{2}}(qr) dr. \quad (10)$$

Zur Ausführung der Rechnungen verwenden wir noch<sup>11</sup>:

---


$$\begin{aligned} J_r(q) &= \frac{N}{q} \left\{ \frac{1}{q^2 - \beta^2} \left[ \beta \sin \beta r_0 \left( \frac{\sin qr_0}{qr_0} - \cos qr_0 \right) - q \sin qr_0 \left( \frac{\sin \beta r_0}{\beta r_0} - \cos \beta r_0 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_a}{q^2 + \alpha^2} \left[ \alpha \left( \frac{\sin qr_0}{qr_0} - \cos qr_0 \right) - q \sin qr_0 \left( 1 + \frac{1}{\alpha r_0} \right) \right] \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

$$L_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm}; \quad \sigma_z \alpha_n = \alpha_n, \quad \sigma_z \beta_n = -\beta_n;$$

Sodann führen wir den Vektor

$$-\frac{8}{9} \mathfrak{k}_0 - \mathfrak{k} = q'$$

ein und legen ihn durch die Winkel  $\vartheta'_0, \varphi'_0$  fest. Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\pi}{4} \left\{ J_r^2(q) \left[ 4k_y^2 + \frac{k_0^2}{81} \sin^2 \vartheta_0 \right] \right. \\ &\quad + 4\mu_n^2 k_0^2 J_r^2(q') \\ &\quad - 2\mu_n k_0 J_r(q) J_r(q') [2k_y \sin(\varphi_0 - \varphi'_0) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k_0}{9} \cos(\varphi_0 - \varphi'_0)] \sin \vartheta_0 \sin \vartheta'_0 \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

wobei schon vorweggenommen wurde, daß  $J_r$  rein imaginär ist. Es fällt uns die Tatsache auf, daß sich die Wirkungsquerschnitte, die von den elektrischen und von den magnetischen Übergängen herrühren, nicht additiv zusammensetzen, sondern daß Interferenzen auftreten. Das war bei den gewöhnlichen Dipolübergängen nicht der Fall.

Die radialen Wellenfunktionen des P-Zustandes der Rechteckmulde lauten nach Bergmann<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} R &= N \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\beta}{r}} J_{\frac{1}{2}}(\beta r), & r \leq r_0 \\ R &= -NN_a e^{\alpha r_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{i\alpha}{r}} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(i\alpha r), & r \geq r_0 \end{aligned} \quad (12)$$

mit den Normierungsfaktoren

$$N^2 = -\frac{2}{r_0 n_0 (n_0^2 + 1)} \frac{(\beta r_0)^2 + R^2}{3(1 + \alpha r_0) + (\alpha r_0)^2}.$$

$$N_a = -n_0 \beta r_0 [(\beta r_0)^2 + R^2]^{-\frac{1}{2}},$$

$$R = n_0^2 (1 + \alpha r_0) + 1.$$

Die Radialintegrale berechnen sich sodann sehr einfach nach der Formel (vgl.<sup>11</sup>):

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int x Z_p(\alpha x) \bar{Z}_p(\beta x) dx = \beta x Z_p(\alpha x) \bar{Z}_{p-1}(\beta x) - \alpha x Z_{p-1}(\alpha x) \bar{Z}_p(\beta x);$$

$Z_p, \bar{Z}_p$  sind dabei zwei beliebige Zylinderfunktionen. Unser Ergebnis lautet dann unter Benutzung der bekannten Formeln, welche die Zylinderfunktionen vom Index  $l+1/2$  durch die trigonometrischen Funktionen ausdrücken:

<sup>11</sup> E. Jahnke u. F. Emde, „Funktionentafeln“, Leipzig: G. Teubner.

### III. Winkelverteilung der Photoneutronen

Der differentielle Wirkungsquerschnitt (8a) stellt die Zahl der in das Raumwinkelelement  $d\Omega$  emittierten Neutronen dar und gibt uns somit schon deren Winkelverteilung an. Es bleibt uns noch die Aufgabe, die Formel explizit durch die Winkel  $\Theta$  und  $\Phi$  auszudrücken. Aus den Definitionen dieser Winkel erhalten wir sofort die Formeln

$$k_y = k \sin \Theta \cos \Phi, \quad (14a)$$

$$q^2 = h^2 + \frac{1}{81} k_0^2 - \frac{2}{9} k k_0 \cos \Theta, \quad (14b)$$

$$q'^2 = k^2 + \frac{64}{81} k_0^2 + \frac{16}{9} k k_0 \cos \Theta. \quad (14c)$$

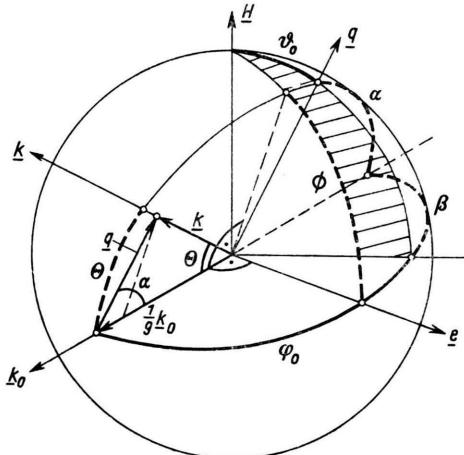


Abb. 1. Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen den einzelnen Winkeln.

Wir lesen ferner aus Abb. 1 die Beziehungen ab:

$$\cos \vartheta_0 = \sin \alpha \sin \Phi, \quad \sin \alpha = \frac{k}{q} \sin \Theta,$$

$$\cos \varphi_0 = -\cos \beta, \quad \cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\sin \vartheta_0}.$$

Damit gelingt es uns, die winkelabhängigen Größen explizit durch die Winkel auszudrücken:

$$\sin^2 \vartheta_0 = \frac{1}{q^2} (q^2 - k^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi), \quad (15a)$$

$$k_y \sin(\varphi_0 - \varphi_0') \sin \vartheta_0 \sin \vartheta_0' = \frac{1}{qq'} k^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi \\ [(q^2 - k^2 \sin^2 \Theta)^{\frac{1}{2}} - (q'^2 - k^2 \sin^2 \Theta)^{\frac{1}{2}}] \quad (15b)$$

$$\cos(\varphi_0 - \varphi_0') \sin \vartheta_0 \sin \vartheta_0' = \frac{1}{qq'} [(q^2 - k^2 \sin^2 \Theta)^{\frac{1}{2}} \\ (q'^2 - k^2 \sin^2 \Theta)^{\frac{1}{2}} + k^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi]. \quad (15c)$$

Die Formeln (8) und (11) stellen uns nun in Verbindung mit (13), (14) und (15) die Winkelverteilung der Neutronen im CM-System dar. Diese lässt sich jedoch leicht auf das Laboratoriumssystem umrechnen. Wir betrachten dazu das Vektordiagramm der Abb. 2. Im Laboratoriumssystem ruht der Schwer-

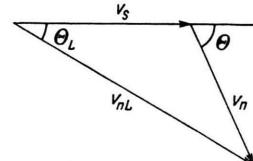


Abb. 2. Zusammenhang der Geschwindigkeitsvektoren des Neutrons in den beiden Bezugssystemen:

$v_n$  = Neutronengeschwindigkeit im CM-System

$v_{nL}$  = Neutronengeschwindigkeit im Laboratoriumssystem

$v_s$  = Schwerpunktsgeschwindigkeit.

punkt des Systems  ${}^8\text{Be} - n$  vor dem Prozeß und wird dann durch den Stoß des Lichtquants in Bewegung versetzt; er erhält dabei eine Geschwindigkeit

$$v_s = \frac{\hbar k_0}{9m};$$

die Geschwindigkeit des Neutrons im CM-System berechnet sich aus der Relativenergie zu

$$v_n = \frac{\hbar k}{m}.$$

Wir bezeichnen den Winkel zwischen einfallendem Lichtquant und emittiertem Neutron im Laboratoriumssystem mit  $\Theta_L$  und erhalten

$$\cos \Theta_L = \frac{v_s + v_n \cos \Theta}{(v_n^2 + v_s^2 + 2v_n v_s \cos \Theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Daraus finden wir schließlich die Winkelverteilung der Photoneutronen im Laboratoriumssystem:

$$d\Phi(\cos \Theta_L) = d\Phi(\cos \Theta) \frac{d \cos \Theta_L}{d \cos \Theta} \\ = d\Phi(\cos \Theta) \frac{\left( \frac{1}{81} k_0^2 + k^2 + \frac{2}{9} k_0 k \cos \Theta \right)^{\frac{3}{2}}}{k^2 \left( k + \frac{1}{9} k_0 \cos \Theta \right)}. \quad (16)$$

Die allgemeine Formel für die Winkelverteilung lässt sich im Fall nichtrelativistischer Energien bedeutend vereinfachen. Wir stellen zunächst den Energiesatz auf, welcher im Laboratoriumssystem lautet:

$$\hbar \omega - \varepsilon = E_r + E_s, \quad (17)$$

da die Relativenergie in beiden Bezugssystemen gleich ist. Daraus erhalten wir:

$$k = \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ \hbar\omega - \varepsilon - \frac{1}{18m} \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Im betrachteten Energiebereich 20 MeV  $\leq \hbar\omega \leq$  200 MeV können die beiden letzten Glieder vollkommen vernachlässigt werden und wir erhalten

$$k^2 \approx \frac{2\mu}{\hbar^2} \hbar\omega = \frac{2\mu c}{\hbar} k_0. \quad (19)$$

Damit formen wir jetzt  $q$  und  $q'$  um zu

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{2\mu c}{\hbar} k_0 \left( 1 + \frac{1}{81} \frac{\hbar\omega}{2\mu c^2} - \frac{1}{9} \beta \cos \Theta \right), \\ q'^2 &= \frac{2\mu c}{\hbar} k_0 \left( 1 + \frac{64}{81} \frac{\hbar\omega}{2\mu c^2} + \frac{8}{9} \beta \cos \Theta \right) \end{aligned} \quad (20)$$

---


$$d\Phi = \frac{d\Omega}{9} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar k}{m\omega} |J_r(q)|^2 \left\{ 4k^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi + k_0^2 \left[ 4\mu_n^2 + \left( \frac{1}{81} - \frac{2}{9} \mu_n \right) \left( 1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi \right) \right] \right\}. \quad (22)$$

Für unpolarisiertes einfallendes Licht ist noch über den Winkel  $\Phi$  das Mittel zu nehmen.

#### IV. Der totale Wirkungsquerschnitt

Wird Formel (22) über  $d\Omega$  integriert, so erhalten wir als Gesamtzahl der emittierten Neutronen den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\Phi = \frac{8\pi}{27} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar k}{m\omega} |J_r(q)|^2 \left\{ 2k^2 + k_0^2 \left( 6\mu_n^2 - \frac{2}{9}\mu_n + \frac{1}{81} \right) \right\}. \quad (23a)$$

Wird noch  $k$  und  $k_0$  durch  $\hbar\omega$  ausgedrückt, so lautet unser endgültiges Resultat:

$$\Phi = \frac{32\pi}{81} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{|J_r(q)|^2}{\hbar} \left( \frac{\hbar\omega}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{32}{9} m + \frac{\hbar\omega}{c^2} \left( 6\mu_n^2 - \frac{2}{9}\mu_n + \frac{1}{81} \right) \right\}. \quad (23b)$$


---

Die Vernachlässigung von  $\beta$  liefert uns als obere Grenze des Gültigkeitsbereichs den Wert  $\hbar\omega \approx 200$  MeV; die untere Grenze ergibt sich aus der Anwendbarkeit der Bornschen Approximation, für welche die Bedingung besteht<sup>12</sup>:

$$\frac{p^2}{2\mu} \gg \varepsilon$$

und daher nach (18):

$$\hbar\omega \gg \varepsilon = 1,63 \text{ MeV}, \quad (24)$$

was uns als untere Grenze den Wert  $\hbar\omega \approx 20$  MeV liefert. Die Vernachlässigbarkeit von  $\varepsilon$  in Gl. (18) wird dadurch begründet.

#### V. Diskussion der Ergebnisse

Wir benützen zur numerischen Diskussion die bekannten Werte  $\mu_n = -1,935$ ,  $m = 1,67 \cdot 10^{-24}$  g. Be-

mit  $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\hbar k}{\mu c}$ .

Wir bemerken dabei noch, daß

$$\frac{\hbar\omega}{\mu c^2} \approx \frac{1}{2} \beta^2.$$

Bei Vernachlässigung von  $\beta$  werden also  $q$  und  $q'$  winkelunabhängig und es gilt

$$q^2 = q'^2 = k^2 = \frac{2\mu c}{\hbar} k_0. \quad (21)$$

Dadurch ergibt sich die vereinfachte Formel für die Winkelverteilung der emittierten Neutronen:

trachten wir zuerst die Winkelverteilung, so erhalten wir bei  $\hbar\omega = 20$  MeV:

$$\begin{aligned} d\Phi \sim d\Omega [188 \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi \\ + 5,32 + 0,152 (1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi)]. \end{aligned}$$

Der erste Term überwiegt somit bedeutend, und es ergibt sich im großen und ganzen eine Winkelverteilung proportional  $\sin^2 \Theta$ , etwa so, wie sie bei Heitler<sup>12</sup> (Abb. auf S. 121) dargestellt ist. Bei kleinen Winkeln  $\Theta$  hingegen oder für  $\Phi = \pi/2$  können der rotationssymmetrische zweite sowie der dritte Term beobachtet werden. Das Auftreten eines isotropen Terms ist übrigens bei einem rotationssymmetrischen Grundzustand nicht möglich, und daher kann experimentell darüber entschieden werden, ob der Grundzustand ein S-Zustand ist<sup>13</sup>. Für höhere Ener-

<sup>12</sup> Vgl. W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation (Oxford, Clarendon Press), § 9.

<sup>13</sup> Ein S-Zustand als Grundzustand wurde von Schrödinger versuchsweise angenommen, obwohl ein P-Zustand durch das Kernschalenmodell nahegelegt wird.

gien treten die beiden letzten Terme stärker hervor, aber  $d\Phi$  als Ganzes nimmt an Größe stark ab.

Wir wenden uns nun dem Energieverlauf des totalen Wirkungsquerschnitts zu. Aus Abb. 3 erkennt man, daß  $\Phi$  bei 20 MeV den Wert  $3 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$  besitzt und für wachsende Energien Nullstellen und abklingende Maxima durchläuft. Die Nullstellen deuten an, daß  $\gamma$ -Quanten von bestimmter Energie in das Beryllium eindringen können, ohne einen Photoprozeß ( $\gamma, n$ ) hervorzurufen.

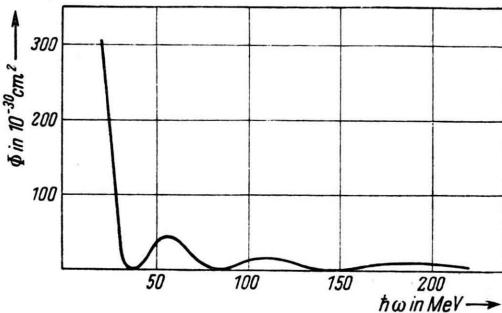


Abb. 3. Energieverlauf des Wirkungsquerschnitts für  $r_0 = 5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ ,  $V_0 = 12,09 \text{ MeV}$ .

Eine ungefähre Abschätzung der Lage dieser Nullstellen und Maxima kann folgendermaßen durchgeführt werden: Es zeigt sich bei Einsetzen der numerischen Werte, daß der Koeffizient der im

Ausdruck für  $J_r(q)$  auftretenden Bessel-Funktion  $\sqrt{qr_0} J_{3/2}(qr_0)$  überwiegt und somit  $J_r(q)$  zugleich mit der Bessel-Funktion positive und negative Werte annimmt. Die Nullstellen dieser Funktion, die proportional

$$\frac{\sin qr_0}{qr_0} - \cos qr_0$$

ist, liegen ungefähr an den Stellen  $qr_0 = n\pi$ , die Extrema an  $(2n+1)\pi/2$ . Dadurch finden wir für die Nullstellen des totalen Wirkungsquerschnitts die Werte  $\hbar\omega = 36,8, 82,2$  und  $146,0 \text{ MeV}$ , und an den Stellen  $\hbar\omega = 20,0, 56,2, 112$  und  $190 \text{ MeV}$  nimmt der Wirkungsquerschnitt die Extremwerte  $305 \cdot 10^{-30}, 41,7 \cdot 10^{-30}, 17,4 \cdot 10^{-30}$  und  $8,7 \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2$  an.

Es ist möglich, daß diese Oszillationen der Energiekurve bloß ein Effekt des Muldenpotentials sind und der Wirkungsquerschnitt bei einem Yukawa-Potential monoton abnehmen würde. Die Wellenfunktionen dieses Potentials sind jedoch nicht in analytischer Form darstellbar. Vorläufig aber braucht über diese Frage nicht entschieden zu werden, da im hohen Energiebereich noch keine ausreichenden experimentellen Ergebnisse vorliegen.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Th. Sengl danken, der die Fertigstellung dieser Arbeit mit großem Interesse verfolgt hat.